Introducción a las Cópulas

Vazquez Morales Juan Antonio

Reyes Cervantes Hortensia Josefina

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

22 de Septiembre de 2021

1. Resumen

Una forma y la mas usual de proponer a $F_{X,Y}$ a partir de F_X y F_Y, es utilizar la teoría de cópulas. Las cópulas son funciones con propiedades especiales que acoplan funciones marginales para formar una FDP cuyas marginales son F_X y F_Y. El procedimiento de está metodología fue dada por Sklar en 1952 en el teorema que ahora lleva su nombre.

El objetivo de este trabajo es explicar teoría básica de las cópulas, la metodología para formular las funciones de distribución $F_{X,Y}$ y mostrar algunos prácticos para la ejemplificación de como utilizar el método de Sklar.

2. Introducción

Justificación

- La creación de funciones de distribución a partir de los datos.
- A partir de funciones de distribución de probabilidad F y G, ¿cómo obtener una función de distribución conjunta H, tal que las marginales de H son F y G?

Posible solución

En [Fisher, 2016] se menciona que

> *"Las cópulas son de interés para los estadísticos por dos razones principales: en primer lugar, como una forma de estudiar medidas de dependencia sin escala; y, en segundo lugar, como punto de partida para la construcción de familias de distribuciones conjuntas, a veces con miras a la simulación".*

3. Cópulas

Definición (H-Volumen)

Sean S_1 y S_2 subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, sea H una función de valor real con $Dom\ H = S_1 \times S_2$. Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ un rectángulo cuyos vértices están en $Dom\ H$. El H-volumen de B está dado por

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Definición (Cópula)

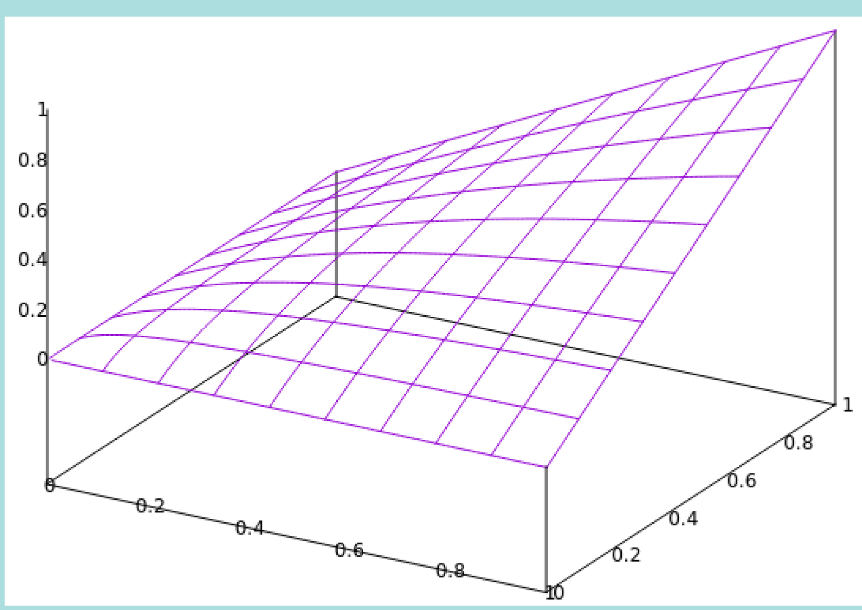
Una función $C : I^2 \to I$ es una cópula si

1. $C(u, v) = 0$ si $u = 0$ o $v = 0$,
2. $C(u, 1) = u$ y $C(1, v) = v$,
3. el V_C-volumen de cualquier rectángulo B, con vértices en I^2, es no negativo, es decir, $V_C(B) \geq 0$.

Ejemplo

Sea

$$C(u,v) = \begin{cases} \frac{uv}{u+v-uv}, & (u,v) \in I^2. \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ e } y = 0. \end{cases}$$



Teorema (Teorema de Sklar)

Sea H una función de distribución conjunta con márgenes F y G. Entonces existe una cópula C tal que para todo x e y en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \qquad (1)$$

Si F y G son continuos, entonces C es única; de lo contrario, C se determina únicamente en $Ran\ F \times Ran\ G$. Por otro lado, si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida en (1) es una función de distribución conjunta con marginales F y G.

Demostración.

Se tiene que para (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en $S_1 \times S_2 = \overline{\mathbb{R}}$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

De ello se deduce que si $F(x_1) = F(x_2)$ y $G(y_1) = G(y_2)$, entonces $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Así el conjunto de pares ordenados

$$\{((F(x), G(y)), H(x, y)) | x, y \in \overline{\mathbb{R}}\},$$

define una función real C cuyo dominio es $Ran\ F \times Ran\ G$. $\square$

Ejemplo

Sean las distribuciones

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x+1}{2}, & x \in [-1, 1] \\ 1, & x > 1, \end{cases} \text{ y } G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

y la cópula

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

Se obtiene

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^{-y}-1)}{x+2e^y-1} & (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty], \\ 1 - e^{-y}, & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición (La quasi-inversa)

Sea F una función de distribución. Entonces una **quasi-inversa de** F es una función $F^{(-1)}$ con dominio I, tal que

1. Si t está en el $Ran\ F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es algún número x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir, para todo t en el $Ran\ F$,
$$F(F^{(-1)}(t)) = t.$$
2. Si t no está en el $Ran\ F$, entonces
$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Corolario

Sea H una función de de distribución conjunta con marginales F y G, y sea $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ las quasi-inversas de F y G, respectivamente. Entonces para cualquier (u, v) en el $Dom\ C$,

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \qquad (2)$$

Ejemplo

Se considera

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^{-y}-1)}{x+2e^y-1} & (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty], \\ 1 - e^{-y}, & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Cuyas quasi-inversa son

$$F^{(-1)}(u) = 2u - 1$$

y

$$G^{(-1)}(v) = -\log(1 - v).$$

Aplicando (2), se obtiene

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}.$$

4. Aplicación real.

Ejemplo

Se supone que la dependencia de dos activos (o factores de riesgos) está descrita mediante la cópula Gaussiana o t-Student. Para calcular el *VaR*:

- Simular series temporales con dicha dependencia de cópula y marginales uniformes y aplicar a dichas series las inversas de las distribuciones marginales.
- Se multiplica cada serie por la desviación típica estimada en la muestra para cada activo.
- Se aplica las ponderaciones para obtener una serie temporal de rentabilidad de la cartera.
- Se calcula el percentil correspondiente al *VaR* en la serie temporal de la cartera.

5. Referencias

Fisher, N. (2016).
Copulas.
In *Encyclopedia of Statistical Sciences*, pages 1363–1367. Wiley, New York, 2 edition.

Mai, J.-F. and Scherer, M. (2017).
Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications, volume 6.
N/A.

Nelsen, R. B. (2007).
An Introduction to Copulas.
Springer Science & Business Media.